

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

➤ **Ενότητα 2: Αξιοσημείωτες ταυτότητες**

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα :

$$(α) (\chi - 4)^2 = \quad (β) (3\chi + 2)^2 = \quad (γ) (\chi + 2)^3 = \quad (δ) (\chi - 3)^3 =$$

$$(ε) (\chi - 2\psi)(\chi + 2\psi) = \quad (στ) (4\chi - 3\psi)^2 = \quad (ζ) (\alpha\beta - \gamma)(\alpha\beta + \gamma) =$$

2. Να αποδείξετε τις ταυτότητες :

$$(α) 3(\chi - 2)(\chi + 2) - (2\chi + 3)^2 = -\chi^2 - 12\chi - 21$$

$$(β) (\chi - 2)^3 - \chi(\chi - 5)^2 + \chi + 17 = (2\chi - 3)^2$$

$$(γ) \left(2\chi^3 + \frac{3}{\chi}\right)^2 - \left(2\chi^3 - \frac{3}{\chi}\right)^2 = 24\chi^2$$

3. Να κάνετε τις πράξεις και να βρείτε την αριθμητική τιμή του αποτελέσματος για $\chi = -3$:

$$(\chi - 5)^2 - 3\chi(\chi - 2) + (2\chi - 3)(2\chi + 3)$$

4. Να κάνετε τις πράξεις και στη συνέχεια να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης για

$$\chi = -2 \text{ και } \psi = \frac{1}{3} : (\psi + 2\chi)^2 - 2\chi(2\chi - \psi) + (2\psi - \chi)(2\psi + \chi) + (\chi - 2\psi)^2$$

➤ **Ενότητα 3: Παραγοντοποίηση – Ρητές αλγ. παραστάσεις**

1. Να κάνετε τις διαιρέσεις :

$$(α) (\chi^3 - \chi^2 - 18\chi - 10) : (\chi - 5) \quad (β) (2\psi^3 - 17\psi - 12 - 3\psi^2) : (2\psi + 3)$$

$$(γ) (3\chi^3 - 4\chi^2 - 17\chi + 6) : (\chi - 3) \quad (δ) (4\chi^4 - 8\chi^3 + 9\chi^2 - 7\chi + 2) : (2\chi^2 - 3\chi + 1)$$

2. Ο ένας παράγοντας του πολυώνυμου $2\chi^2 + 7\chi - 15$ είναι το $2\chi - 3$. Να βρείτε τον άλλο παράγοντα.

3. Να βρείτε το πολυώνυμο το οποίο όταν διαιρεθεί με το $2\psi + 4$ δίνει πηλίκο $\psi^2 - 3\psi + 5$ και αφήνει υπόλοιπο 3.

4. Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πολυώνυμα :

$$(α) 3\chi^2 - 6\chi^3 =$$

$$(β) 5\alpha^2 + 15\alpha\beta =$$

$$(γ) \chi^2 - 16 =$$

$$(δ) 4\chi^2 - 9 =$$

$$(ε) 12\chi^2 - 27 =$$

$$(στ) \chi^2 + 5\chi + 6 =$$

$$(ζ) \chi^2 - 7\chi + 12 =$$

$$(η) 6\chi^3\psi^2 - 3\chi^2\psi =$$

$$(θ) \omega\chi + \omega\psi + 2\chi + 2\psi =$$

$$(ι) \kappa^3 - \lambda^3 + \kappa^2 - \lambda^2 =$$

$$(κ) 9\alpha\chi^2 + 6\alpha\chi - \alpha\psi^2 + \alpha =$$

5. Να βρείτε τις τιμές της μεταβλητής για τις οποίες ορίζονται οι πιο κάτω παραστάσεις:

$$(α) \psi = 3\chi - 5$$

$$(β) \psi = \frac{5\chi - 2}{7}$$

$$(γ) \psi = \frac{5}{\chi}$$

$$(δ) \psi = \frac{2\chi + 1}{\chi - 5}$$

$$(ε) \psi = \frac{4}{\chi + 3}$$

$$(στ) \psi = \frac{3\chi + 7}{\chi^2 - 16}$$

$$(ζ) \psi = \frac{3\chi - 2}{\chi^2 - 5\chi + 6}$$

$$(η) \psi = \frac{5\chi + 11}{\chi^3 - 9\chi}$$

$$(θ) \psi = \frac{2 - \chi}{\chi^2 + 5}$$

$$(ι) \psi = \frac{4\chi + 3}{\chi^3 + 2\chi}$$

$$(κ) \psi = \frac{4}{\chi^4 - 4\chi^2}$$

$$(λ) \psi = \sqrt{\chi - 3}$$

$$(μ) \psi = \sqrt{3 - 2\chi}$$

$$(ν) \psi = \frac{5\chi}{\sqrt{\chi - 5}}$$

6. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

$$α) \frac{5x^2\psi}{10\chi^3\psi} =$$

$$β) \frac{12\chi^2\psi.z}{18x^2\psi^3z} =$$

$$γ) \frac{a - \beta}{\beta - \alpha} =$$

$$δ) \frac{3x^2 - 3}{6x + 6} =$$

$$ε) \frac{x^3 + 8}{x^2 - 4} =$$

$$στ) \frac{(a + \beta)^2 - (a - \beta)^2}{\alpha^2\beta - \alpha\beta^2} =$$

$$ζ) \frac{2\chi^2 - 2}{\chi^3 - 3\chi^2 + 2\chi} =$$

$$η) \frac{\alpha^2 - 4}{\alpha^2 + 5\alpha + 6} =$$

$$θ) \frac{(\chi^3 + 2\chi^2)(\chi - 1)}{(\chi^2 - 2\chi + 1)(\chi^2 - 4)} =$$

7. Να κάνετε τις πράξεις:

$$(α) \frac{3}{\chi - 5} - \frac{\chi - 2}{\chi^2 - 6\chi + 5} =$$

$$(β) \frac{9}{\chi^2 + \chi - 2} - \frac{3}{\chi - 1} =$$

$$(γ) \frac{7}{\chi^2 + 3\chi - 10} - \frac{2}{\chi^2 + 5\chi} - \frac{2}{\chi^2 - 2\chi} =$$

$$(δ) \frac{\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} - 2}{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{8}} =$$

$$\begin{array}{ll}
 (\epsilon) \left(\frac{2}{\chi+2} - \frac{1}{\chi-2} \right) : \frac{\chi^2 - 12\chi + 36}{\chi^2 - 4} & (\sigma\tau) \frac{\chi^2 + \psi^2 - 2}{\frac{\chi\psi}{\frac{1}{\chi} - \frac{1}{\psi}}} = \\
 (\zeta) \left(2 - \alpha + \frac{2\alpha^2}{2 + \alpha} \right) : \frac{4\beta + \alpha^2\beta}{\alpha^2\chi - 4\chi} = & (\eta) \frac{6}{\chi^2 - 3\chi} - \frac{2\chi + 6}{\chi^2 - 9} = \\
 (\theta) \left(\frac{\chi + 2}{\chi^2 - 2\chi} - \frac{\chi}{\chi^2 - 4} \right) : \frac{2\chi^3 + 2}{\chi^3 - 4\chi^2 + 4\chi} = & (\iota) \frac{\frac{\psi}{1+\psi} - \frac{\psi}{1-\psi}}{\frac{1}{1-\psi^2}} = \\
 (\iota\alpha) \frac{\chi^2 + 4\chi}{\chi^2 + 5\chi} : \frac{\chi^2 - 16}{\chi^2 + 8\chi + 15} = & (\iota\beta) \frac{\alpha^2\beta - 4\beta^3}{3\alpha\beta^2} \cdot \frac{\alpha^2\beta}{\alpha^2 - 2\alpha\beta} = \\
 (\iota\gamma) \frac{\alpha^2 - 4\chi^2}{\alpha^2 + 4\alpha\chi} : \frac{\alpha^2 - 2\alpha\chi}{\alpha\chi + 4\chi^2} \cdot \frac{\alpha^2}{\chi\alpha + 2\chi^2} = & (\iota\delta) \left(\alpha + 1 - \frac{1}{\alpha+1} \right) : \left(\alpha - \frac{a^2}{a-1} \right)
 \end{array}$$

8. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) \chi^2 - 16 = 0 \quad \beta) \chi^2 = 4\chi \quad \gamma) \frac{5}{x} - \frac{3}{2} = \frac{2}{x} \quad \delta) \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2 + 3x} = 0$$

$$\epsilon) \frac{2}{x+3} - \frac{1}{3-x} = \frac{6x}{x^2 - 9} \quad \sigma\tau) \frac{x-2}{x} + \frac{4}{x-2} = \frac{8}{x^2 - 2x} \quad \zeta) \frac{2 + \frac{x}{x-4}}{1 - \frac{x}{x-4}} = 3$$

$$\eta) 2\chi^2 = 7\chi \quad \theta) 3\chi^2 - 75 = 0 \quad \iota) 2\chi^2 + 8 = \quad \iota\alpha) \chi \cdot (\chi - 4) = -4$$

$$\iota\beta) \psi^2 + \psi - 12 = 0 \quad \iota\gamma) \omega^2 - 2\omega - 15 = 0 \quad \iota\delta)) 2t^2 - 7t + 6 = 0$$

$$\iota\epsilon)) 3\varphi^2 + 1 = 4\varphi \quad \iota\sigma\tau)) 5z^2 - 3z - 8 = 0$$

9.α) Να βρεις την τιμή του κ ώστε η εξίσωση $\chi^2 - 3\chi + \kappa = 0$ να έχει λύση τον αριθμό 2.

β) Για την τιμή του κ που βρήκες, να λύσεις την εξίσωση.

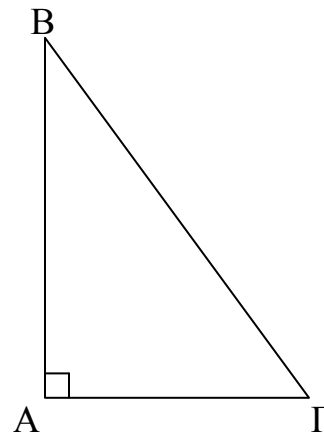
➤ Ενότητα 4: Γεωμετρία

1. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Ευθεία (ε) περνά από τα μέσα K, Λ των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα B και Γ ισαπέχουν από την ευθεία (ε).
2. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Να φέρετε τις διχοτόμους $B\Delta$ και ΓE των γωνιών B και Γ αντίστοιχα που τέμνονται στο O . Να δείξετε ότι τα τρίγωνα BOE και $GO\Delta$ είναι ίσα.
3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Να προεκτείνετε την πλευρά AB προς το B κατά τμήμα $B\Delta$ και την πλευρά $A\Gamma$ προς το Γ κατά τμήμα ΓE έτσι ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Αν M είναι το μέσο της $B\Gamma$ να δείξετε ότι :
(α) $M\Delta = ME$ και (β) τα τρίγωνα $AM\Delta$ και AME είναι ίσα .
4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Προεκτείνουμε τις πλευρές AB και $A\Gamma$ προς το μέρος του A και στις προεκτάσεις σημειώστε αντιστοίχως σημεία Δ και E τέτοια ώστε $A\Delta = AE$. Αν H είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔEH είναι ισοσκελές .
5. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\mathbf{A} = 90^\circ$) φέρουμε τη διάμεσο AM . Αν E είναι το μέσο της AB και Z το μέσο της $A\Gamma$, να δείξετε ότι $EZ = AM$.

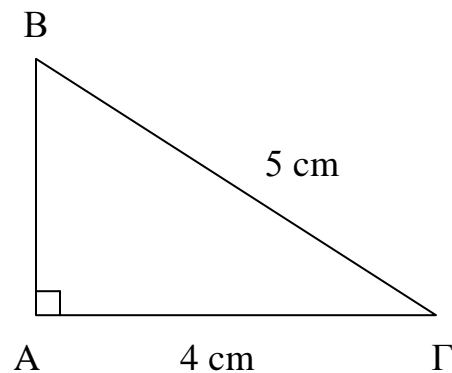
➤ Ενότητα 5: Τριγωνομετρία

1. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\mathbf{A} = 90^\circ$, $\mathbf{B} = 60^\circ$ και $B\Gamma = 4\text{cm}$). Να βρεθούν οι πλευρές AB και $A\Gamma$.
2. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$, αν : $A\Gamma = 20\text{ m}$ και η γωνιά $\mathbf{A} = 35^\circ$. Δίνονται : $\eta\mu 35^\circ = 0,57$, $\sigma\upsilon\nu 35^\circ = 0,81$ και $\varepsilon\varphi 35^\circ = 0,7$.
3. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\mathbf{A} = 90^\circ$) δίνονται : $AB = 5\text{ cm}$ και $A\Gamma = 12\text{ cm}$.
Να υπολογιστούν : (α) $\eta\mu B$, (β) $\sigma\upsilon\nu B$ και (γ) $\varepsilon\varphi B$.

Δεδομένα	Ζητούμενα
$\hat{A} = 90^\circ$	$\sigma\upsilon\nu\Gamma$
$\eta\mu\Gamma = \frac{8}{10}$	$\epsilon\phi\Gamma$
	$\eta\mu\text{B}$



5. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς (ημίτονο , συνημίτονο και εφαπτομένη) της γωνιάς \hat{B} στο διπλανό σχήμα .

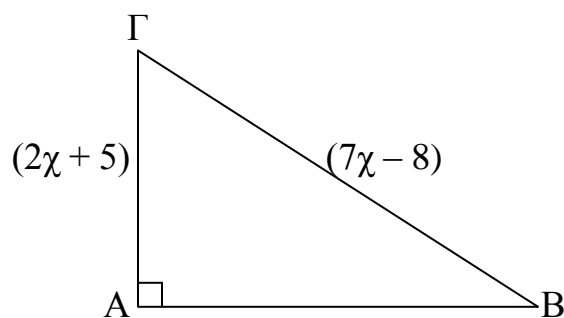


6. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, με $\hat{B} = 30^\circ$ να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών AB και $B\Gamma$.

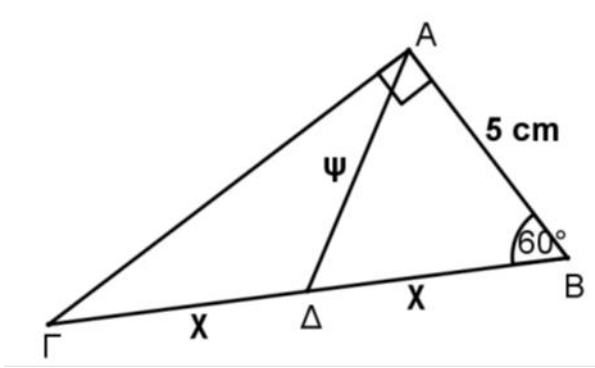
(Δίνονται : $\eta\mu 30^\circ = 0,5$,

$\sigma\upsilon\nu 30^\circ = 0,866$ και

$\epsilon\phi 30^\circ = 0,5774$)



7. Να υπολογίσετε το χ και το ψ στο πιο κάτω σχήμα, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.



➤ **Ενότητα 6: Ευθεία – Συστήματα**

1. Να βρείτε τις κλίσεις των πιο κάτω ευθειών :

(α) $\psi = 7\chi - 2$ (β) $-2\chi + 4\psi + 5 = 0$

2. Δίνονται τα σημεία $A(3,6)$ και $B(-3,-2)$. Να βρείτε:

α) Την απόσταση των δύο σημείων.

β) Το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB .

3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο $(1, -2)$ με κλίση 5 .

4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο $A(-3, 4)$ και είναι παράλληλη με την ευθεία $2\chi - \psi = 5$.

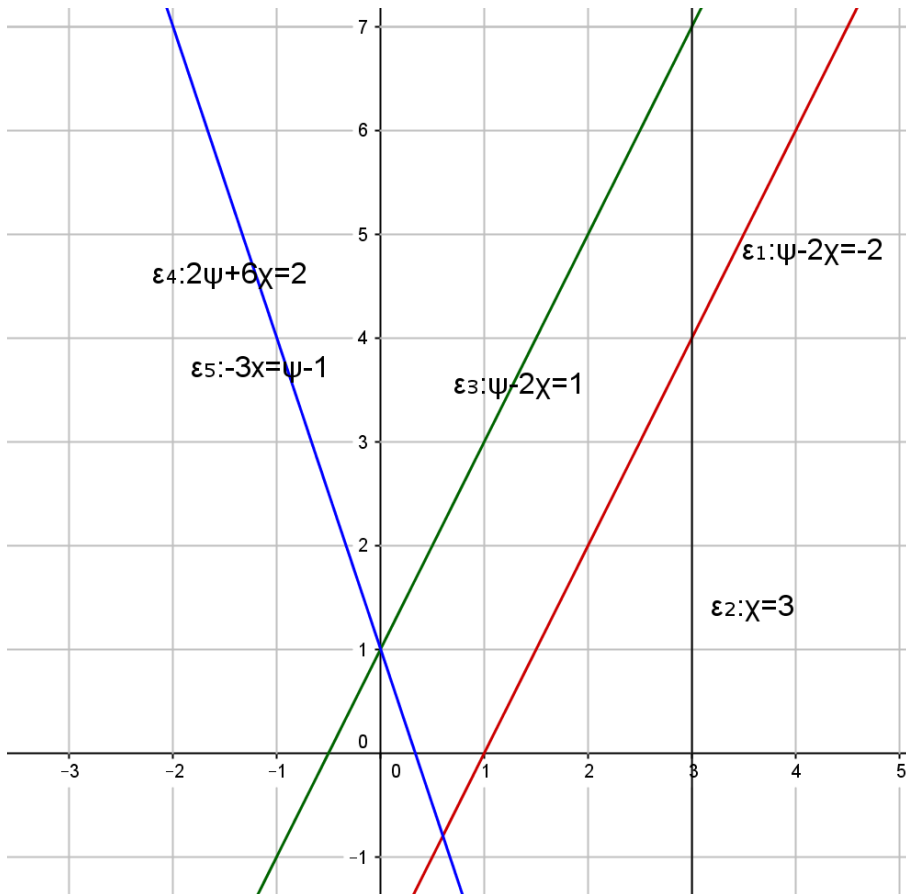
5. Δίνεται η ευθεία $\psi = \alpha\chi + \beta$. Να υπολογίσετε τα α και β αν τα σημεία $A(1, 5)$ και $B(-1, 1)$ ανήκουν στην ευθεία .

6. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο $(-6, 2)$ και είναι παράλληλη με την ευθεία $\chi + 2\psi = 5$.

7. Αν η ευθεία : $\varepsilon_1: \psi = (3\alpha - 7)\chi + 2$ είναι παράλληλη με την ευθεία : $\varepsilon_2: \psi = 5\chi - 4$, να βρεθεί η αριθμητική τιμή του α .

8. Η ευθεία $\psi = (2\alpha + 1)\chi + 3\beta$ είναι παράλληλη με την ευθεία $\psi = 4\chi - 1$ και περνά από το σημείο $(-3, 3)$ να βρείτε τα α και β .

9. Στο ορθογώνιο σύστημα αξόνων δίνονται οι γραφικές παραστάσεις πέντε εξισώσεων. Να εξετάσετε κατά πόσο τα ακόλουθα συστήματα εξισώσεων έχουν λύση χρησιμοποιώντας τις γραφικές παραστάσεις που δίνονται. Για το καθένα να βρείτε τη λύση ή τις λύσεις (αν υπάρχουν χωρίς να λυθούν τα συστήματα).



(α) $\varepsilon_2: \chi = 3$
 $\varepsilon_1: \psi - 2\chi = 2$

(β) $\varepsilon_3: \psi - 2\chi = 1$
 $\varepsilon_1: \psi - 2\chi = 2$

(γ) $\varepsilon_4: 2\psi + 6\chi = 2$
 $\varepsilon_5: -3\chi = \psi - 1$

(δ) $\varepsilon_4: 2\psi + 6\chi = 2$
 $\varepsilon_3: \psi - 2\chi = 1$

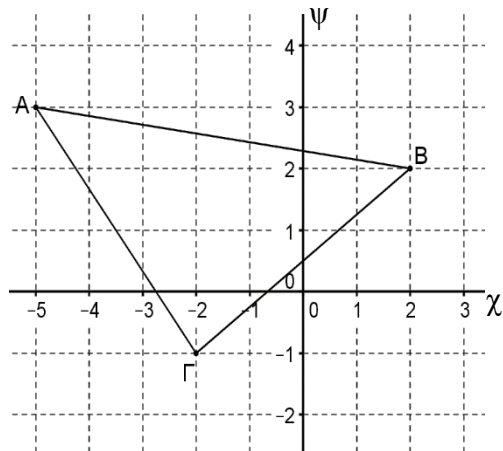
11. Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1: \psi = (3\alpha + 4)\chi + 5$ και $\varepsilon_2: 2\chi - 4\psi = 1$. Αν οι ευθείες είναι κάθετες, να υπολογίσετε την τιμή του α .

Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ.

(α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι

(i) ορθογώνιο και

(ii) ισοσκελές.



12. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα :

$$(\alpha) \begin{cases} 2\chi + 3\psi = 5 \\ 3\chi - 2\psi = 4 \end{cases}$$

$$(\beta) \begin{cases} \chi + 3\psi = 7 \\ 2\chi + \psi = 4 \end{cases}$$

$$(\gamma) \begin{cases} 2\chi + 3\psi = -6 \\ \chi - 2\psi = 4 \end{cases}$$

$$(\delta) \begin{cases} 2(3\chi - 5) - 4(\chi + \psi) = -22 \\ \frac{2\psi - \chi}{3} - \frac{3\chi - 10}{4} = \frac{\chi + \psi}{2} \end{cases}$$

$$(\epsilon) \begin{cases} 2(\chi + \psi) - (3\chi - 5) = 11 \\ \frac{4\psi - 2\chi}{3} - \frac{6\chi - 20}{4} = \frac{\psi + 4\chi}{2} \end{cases}$$

12. Να λύσετε τα προβλήματα με την βοήθεια συστημάτων :

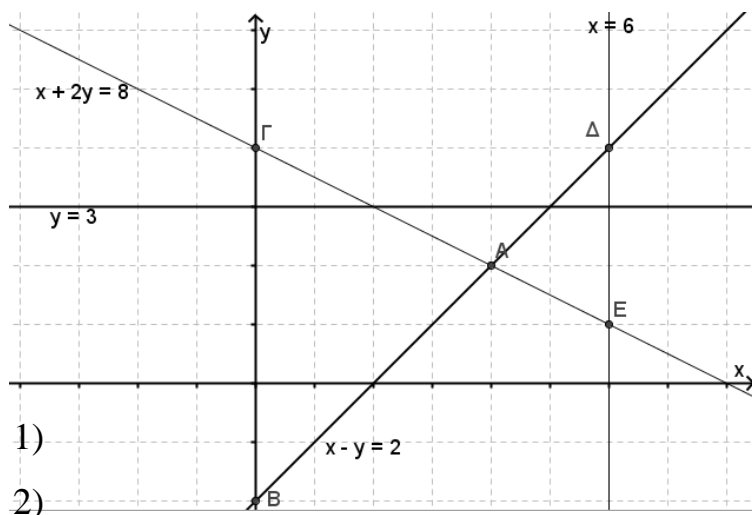
(α) Το άθροισμα των ηλικιών ενός πατέρα και της κόρης του είναι 50 χρόνια . Μετά από 5 χρόνια η ηλικία του πατέρα θα είναι τριπλάσια από την ηλικία της κόρης του . Πόσων χρονών είναι ο καθένας τους σήμερα ;

(β) Το άθροισμα των ηλικιών του Γιώργου και της Μαρίας είναι 45 χρόνια . Πριν 5 χρόνια η ηλικία του Γιώργου ήταν εξαπλάσια από την ηλικία της Μαρίας . Ποιες οι σημερινές τους ηλικίες ;

(γ) Τα ημερομίσθια 10 οικοδόμων και 3 εργατών είναι € 295 . Αν κάθε οικοδόμος παίρνει για 3 μέρες όσα παίρνει κάθε εργάτης για 5 μέρες , να βρείτε το ημερομίσθιο του καθενός .

(δ) Τα πρόβατα και τα περιστέρια του Γιώργου έχουν 240 πόδια . Αν όλα τα ζώα είναι 90 , να βρείτε πόσα είναι τα περιστέρια και πόσα τα πρόβατα .

11. Δίνονται οι πιο κάτω γραφικές παραστάσεις:



α) Με τη βοήθεια των πιο πάνω γραφικών παραστάσεων να λύσετε τα πιο κάτω συστήματα :

i) $x + 2y = 8$
 $x - y = 2$

ii) $y = 3$
 $x - y = 2$

iii) $x = 6$
 $x + 2y = 8$

iv) $y = 0$
 $x + 2y = 8$

v) $x = 0$
 $x - y = 2$

β) Να αποδείξετε ότι εμβαδόν του τριγώνου ABΓ είναι τετραπλάσιο από το εμβαδόν του τριγώνου AΔΕ.

12. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB, με A(-1, 2) και B(3, -4). Να βρεθούν:

α) οι συντεταγμένες του μέσου του

β) το μήκος του